Einsatzmöglichkeiten des TI-92 im Mathematikunterricht unter Berücksichtigung verschiedener Darstellungsformen

Franz Schlöglhofer, Gmunden

Der TI-92 ist gegenüber bisher im Mathematikunterricht verwendeten Rechnern dadurch hervorgehoben, daß in ihm mehrere Computerprogramme integriert werden konnten, die schon bisher im Unterricht verwendet wurden. Neben der „normalen" Taschenrechnerfunktionen enthält dieser Rechner ein auf DERIVE aufgebautes Computeralgebrasystem, ein auf CABRI aufgebautes Geometrieproramm, eine Möglichkeit zum Programmieren und eine Art Tabellenkalkulation.

Weiters gibt es am TI-92 verschiedene Darstellungsmöglichkeiten. Im Algebrafenster können die Taschenrechnerfunktion und das Computeralgebrasystem genützt werden. Darüber hinaus gibt es eine Tabellendarstellung, eine Darstellungsmöglichkeit für Funktionsgraphen und die Möglichkeit für geometrische Konstruktionen. Mathematische Aufgabenstellungen können in verschiedenen Darstellungsformen und auf unterschiedlichen Stufen der Exaktifizierung behandelt werden. Angefangen von einfachen numerischen Berechnungen bzw. geometrischen Konstruktionen bis hin zu formalen algebraischen Berechnungen kann der Rechner auf jeder Stufe erstens als Rechenhilfsmittel und zweitens als Darstellungsmittel zur Unterstützung des mathematischen Erkenntnisprozesses eingesetzt werden.

Im folgenden werden einige Möglichkeiten des TI-92 im Hinblick auf verschiedene Darstellungsmöglichkeiten anhand von konkreten Aufgabenstellungen behandelt.

Funktionen - Extremwertsaufgabe

Von einem geraden Drehzylinder ist das Volumen V gegeben. Der Radius r und die Höhe h des Zylinders sollen so berechnet werden, daß der Oberflächeninhalt minimal wird.

Die Aufgabenstellung wird in mehreren Stufen behandelt. Ausgegangen wird von einer Tabellendarstellung, in der mit der Darstellung von Zahlen in funktionalen Zusammenhängen ein erster Überblick geschaffen werden soll. Darauf aufbauend wird die Aufgabe mit Funktionsgraphen und anschließend mit Mitteln der Analysis behandelt. Dies entspricht einem Aufbau in mehreren Stufen der Exaktifizierung. (Nicht eingegangen wird in diesem Beitrag auf Möglichkeiten einer anwendungsorientierten Einführung.)

Für das Volumen V und den Oberflächeninhalt O eines geraden Drehzylinders gilt:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \qquad O = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

Bei gegebenem Volumen V ist ein Zylinder mit minimalem Oberflächeninhalt gesucht.

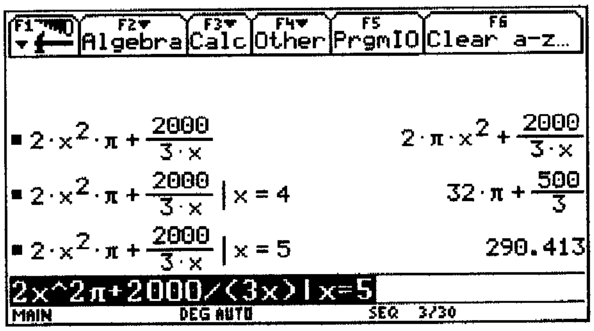
Tabellendarstellung

In der Tabellendarstellung des TI-92 wird der Oberflächeninhalt O in Abhängigkeit vom Radius des Zylinders berechnet.

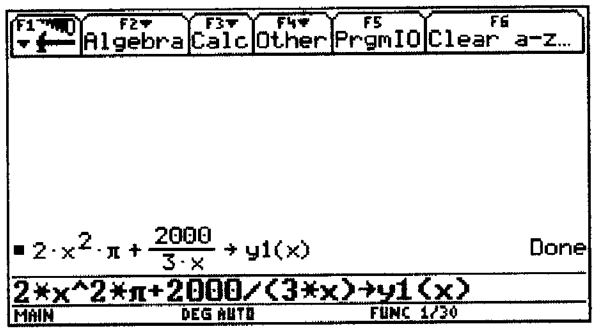
Aus der Volumsformel kann h berechnet werden: $h = \frac{V}{r^2 \pi}$

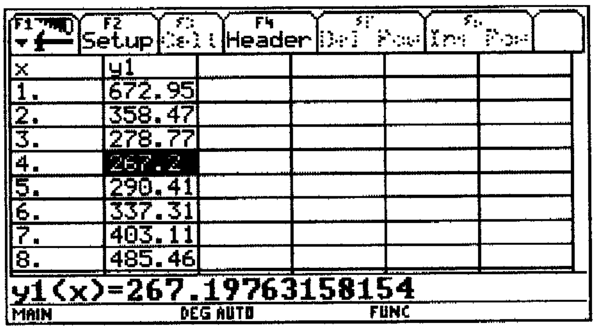
Für den Radius x (statt r) ergibt sich O (in Abhängigkeit von x): $O(x) = 2x^2\pi + \frac{2 \cdot V}{x}$

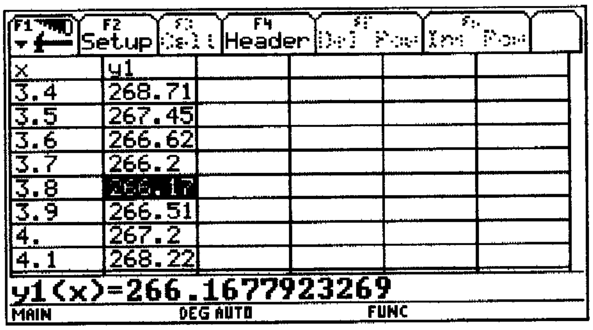
Der Funktionsterm O(x) wird im Algebrafenster eingegeben. Bereits hier ergibt sich die Möglichkeit der Berechnung von Werten für O mit Hilfe des sogenannten „WITH-Operators". Das Bild zeigt die jeweilige Eingabe und das Ergebnis im „Exakt-Modus" bzw. näherungsweise. Für das Volumen wurde 1000/3 (Einheit ml) gesetzt.



Die nebenstehende Abbildung zeigt, wie O(x) als aufrufbare Funktion eingegeben werden kann. Mit dieser Eingabe ergibt sich nun automatisch die Möglichkeit der Darstellung in Tabellenform. Bei günstiger Wahl der Schrittweite kann man aus dem Zahlenmaterial bereits einen Überblick über den Funktionsverlauf erhalten. In den folgenden beiden Abbildungen wird gezeigt, daß man damit bereits zur Vermutung über die Existenz eines Minimums gelangen kann.



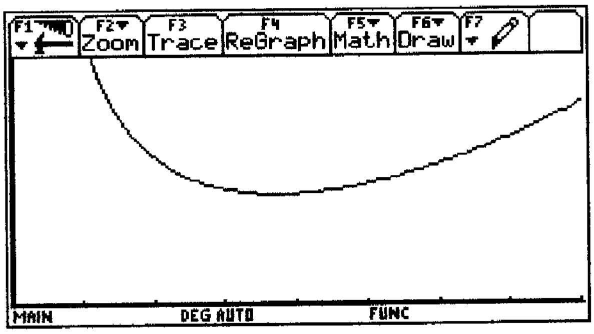




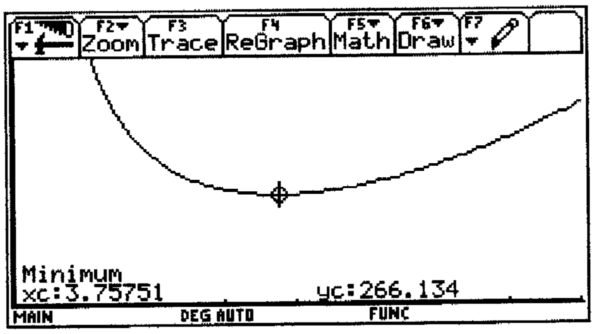
Funktionsgraphen

Mit der Festlegung des Terms für die Tabellendarstellung ist gleichzeitig auch die Möglichkeit der Darstellung eines Funktionsgraphen zum festgelegten Funktionsterm gegeben. Es müssen nur noch die Einheiten festgelegt werden.

Nach geeigneter Einstellung der Einheiten (in WINDOW) kann direkt in das Graphikfenster umgeschaltet werden und man erhält das nebenstehende Bild. Eine wichtige Lernstufe scheint dabei zu sein, daß Schüler anhand der Zahlen einer Tabellendarstellung selbständig in der Lage sind, Einheiten auszuwählen und damit zu einer geeigneten Graphikdarstellung zu gelangen.



Im Graphikfenster gibt es im Menü F5-Math einige Möglichkeiten für numerische Berechnungen. Damit können beispielsweise Extremstellen, Schnittpunkte oder Nullstellen ermittelt werden. Die Abbildung zeigt die näherungsweise berechnete Minimumstelle mit $x \approx 3{,}76$ (xc) und den dazugehörigen Oberflächeninhalt (yc).

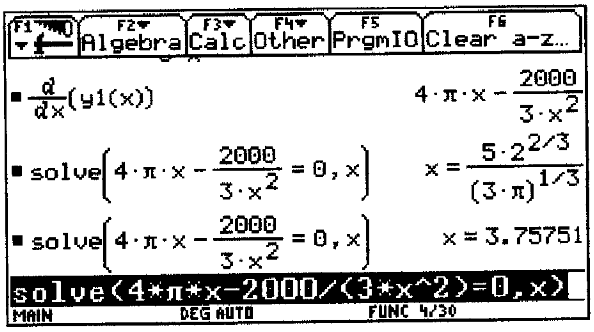


Wenn man nur an einem Überblick über die Möglichkeit einer Lösung und an einer näherungsweisen Berechnung interessiert ist, kann an dieser Stelle der Berechnungsvorgang u.U. bereits abgeschlossen werden. Die Ebene der Tabellen- und Funkionsgraphendarstellung eignet sich auch günstig für die Modellerweiterung, da die Funktionsterme oft leichter aufgestellt als algebraisch behandelt werden können.

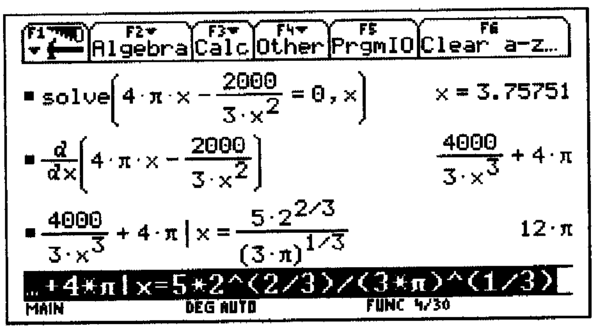
Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung

Anhand der Tabellendarstellung und den Funktionsgraphen können Extremstellen nicht begründet werden. Dafür können hier günstig Methoden der Analysis verwendet werden.

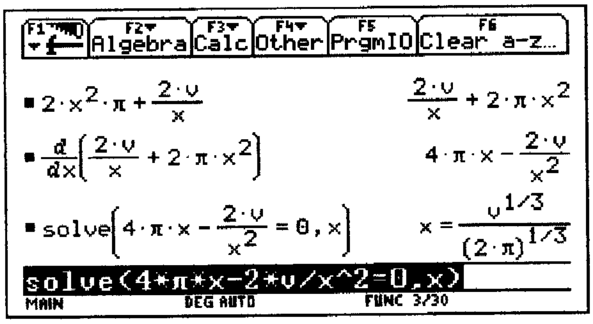
Mit Hilfe des TI-92 ist es möglich, Differentialquotienten zu berechnen sowie Gleichungen zu lösen. Damit kann die obige Aufgabenstellung, wie in der Abbildung dargestellt, weiter behandelt werden. Die erste Ableitung wird 0 gesetzt, die Gleichung mit solve gelöst. Für den Radius ergibt sich näherungsweise 3,76.

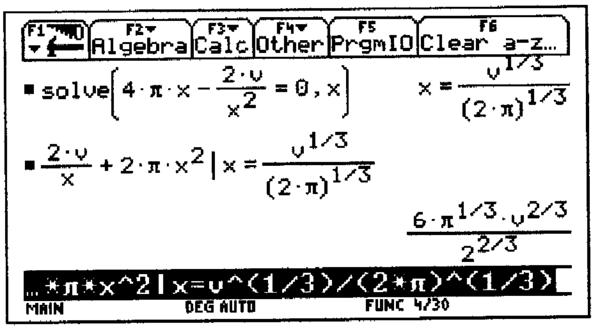


Das Ergebnis kann in die zweite Ableitung eingesetzt werden. Es ergibt sich 12π. Damit kann geschlossen werden, daß ein relatives Minimum vorliegt.

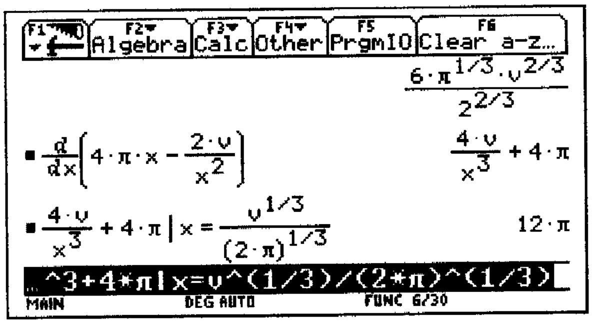


Für eine weitere Verallgemeinerung kann die Berechnung allgemein mit V als Volumsmaß durchgeführt werden. In den folgenden beiden Abbildungen wird gezeigt, wie der Funktionsterm festgelegt werden kann sowie die Ableitung und der Radius für einen minimalen Oberflächeninhalt berechnet werden können.





In der nebenstehenden Abbildung erkennt man, daß sich für die zweite Ableitung wiederum 12π ergibt. Das Ergebnis ist also unabhängig von V. Dies könnte zu weiteren Untersuchungen der ganzen Klasse von Funktionen Anlaß geben.
Da für solche algebraische Berechnungen der Rechner eine gute Hilfe ist, kann man oft leichter zu allgemeinen Aussagen kommen.



Binomialverteilung

Vom Lehrplan Mathematik für die 7. Klasse AHS ist im Rahmen der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Beschäftigung mit der Binomialverteilung vorgesehen. Diese Verteilung kann folgendermaßen angegeben werden:

Satz: Bei einem Zufallsversuch trete ein Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit p ein. Der Versuch werde n-mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt. Ist H die Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis E eintritt, dann gilt:

$$P(H=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad (0\le k\le n)$$

Definition: Sei p eine reelle Zahl mit $0\leq p\leq 1$. Sei H eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten 0, 1, 2, ..., n. Wird jedem Wert k (mit $0\leq k\leq n$) die Wahrscheinlichkeit

$$P(H=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad (0\le k\le n)$$

zugeordnet, dann bezeichnet man die dadurch festgelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung als Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Die Zufallsvariable H nennt man binomialverteilt mit den Parametern n und p.

Bei der Behandlung der Binomialverteilung bietet der TI-92 beispielsweise die Möglichkeit der direkten Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, der Festlegung von Funktionsaufrufen sowie der graphischen Darstellung der Verteilung.

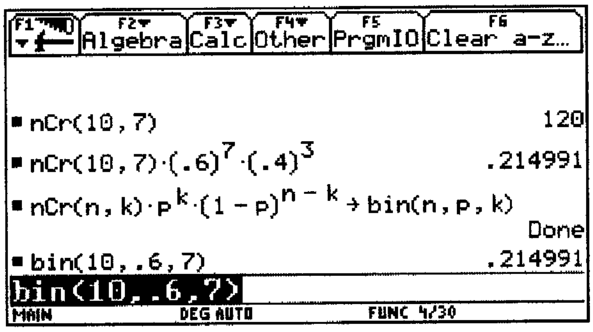
Aufgabe:

> *In einem Versandhaus weiß man aus Erfahrung, daß ca. 60% der Personen, die einen Katalog erhalten, auch eine Ware bestellen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 10 Personen, die einen Katalog erhalten haben, sieben Personen eine Ware bestellen?*

Mit n=10, k=7 und p=0,7 ergibt sich:

$$P(H=7)=\binom{10}{7}\cdot 0{,}6^7\cdot 0{,}4^3$$

Die Binomialkoeffizienten können am TI-92 mit dem Funktionsaufruf nCr berechnet werden. Die Abbildung zeigt den Aufruf und die Berechnung. Man erhält nCr(10,7)=120.



Damit läßt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen. Es ergibt sich P(H=7)≈0,215.

In der Abbildung wird auch gezeigt, wie die Berechnung der Wahrscheinlichkeit automatisiert werden kann. Mit dem selbst gewählten Funktionsaufruf bin(n,p,k) können verschiedene Wahrscheinlichkeiten leicht berechnet werden.

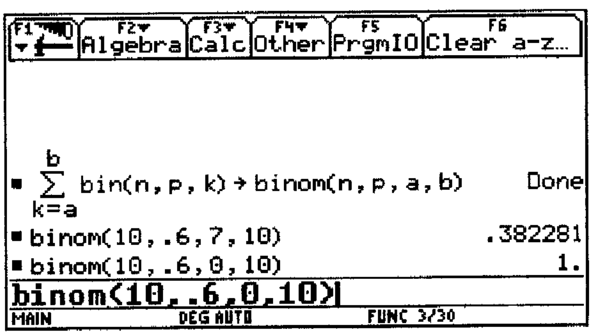
Fortsetzung der Aufgabe:

> *Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 7 Personen eine Ware bestellen!*

Man erhält die Wahrscheinlichkeit durch die folgende Summe:

P(H=7)+ P(H=8)+ P(H=9)+ P(H=10)

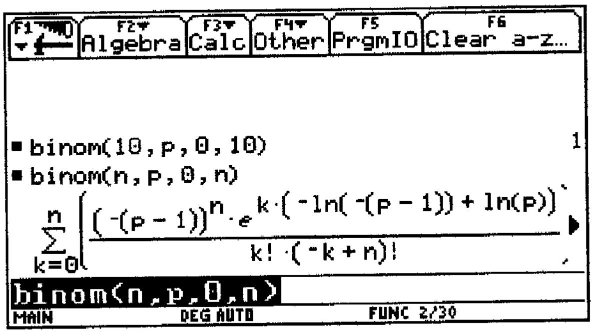
Am TI-92 gibt es die Möglichkeit der Summenbildung durch „Σ“. Durch den in der Abbildung dargestellten Summenaufruf werden die Wahrscheinlichkeiten bin(n,p,k) für k von a bis b addiert, also im konkreten Beispiel bin(10,0.6,k) von k=7 bis k=10. Es ergibt sich ≈0,382.



Mit der Festlegung von binom(n,p,a,b) ergibt sich der Vorteil, daß die Berechnungen (ohne in Tabellen nachsehen zu müssen) für jede beliebige Wahrscheinlichkeit durchgeführt werden können.

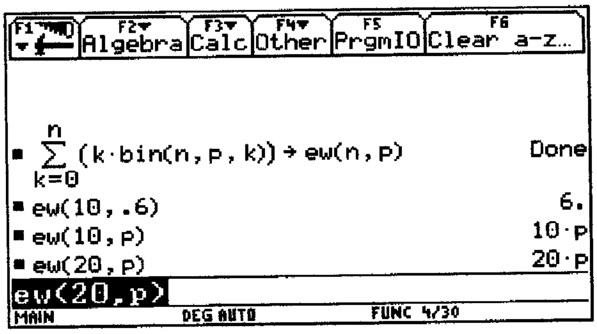
Ein Vorteil des Funktionsaufrufes binom ist auch, daß über die Verteilung selbst allgemeine Erkenntnisse gewonnen werden können. Beispielsweise erkennt man in der letzten Zeile der obigen Abbildung, daß das Ergebnis 1 ist, wenn für k von 0 bis 10 summiert wird.

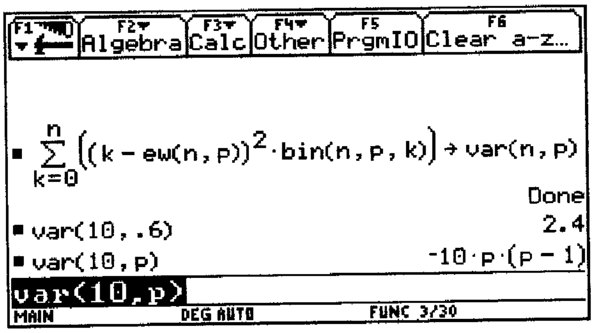
Die Berechnung kann weiter durch den Aufruf von binom(10,p,0,10) verallgemeinert werden, wodurch sich ebenfalls 1 ergibt. Es muß also nicht eine konkrete Wahrscheinlichkeit gewählt werden. Die Abbildung zeigt aber auch, daß es nicht möglich ist, die Berechnung mit der Anzahl n allgemein durchzuführen.



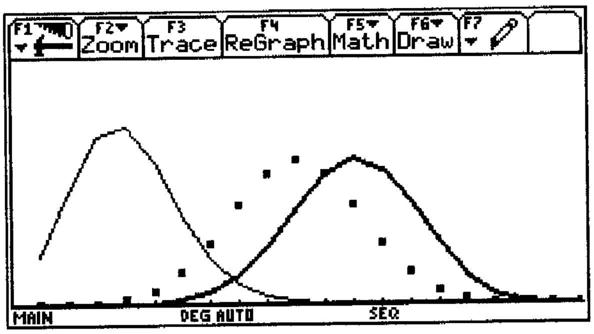
Erwartungswert und Varianz

Mit Hilfe der bisher festgelegten Funktionsaufrufe können der Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilung behandelt werden. In den folgenden Abbildungen wird die Berechnung des Erwartungswertes durch ew(n,p) und die Berechnung der Varianz durch var(n,p) festgelegt. Wie die beiden folgenden Abbildungen zeigen, ist es auch hier wiederum möglich, auf experimentellem Weg Grundlagen der Binomialverteilung vorzubereiten und die Formeln (zumindest für konkrete Anzahlen) herleiten.





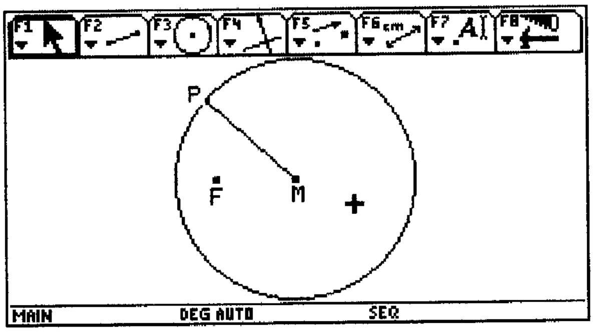
Mit der Graphikdarstellung kann die Binomialverteilung graphisch dargestellt werden. Die nebenstehende Abbildung enthält die Graphen der Verteilungen für n=20 sowie für p=0,2, 0,5 und 0,6. Für die Darstellung selbst wurden bewußt verschiedene „Styles“ verwendet, um einige Möglichkeiten des TI-92 zu zeigen.



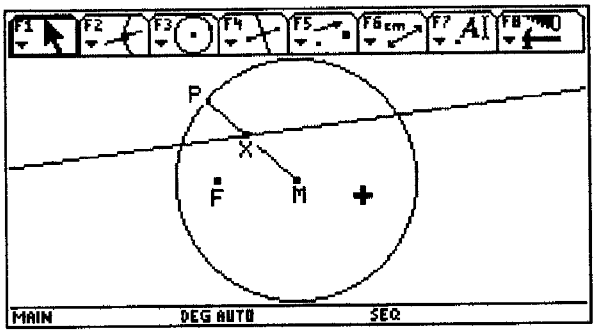
Geometrie - Ellipsenkonstruktion

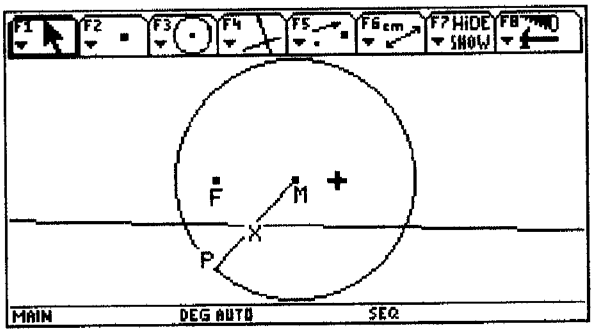
Ein weiterer wichtiger Bestandteil am TI-92 ist das Geometrie-Modul. Als Beispiel wird hier eine Ellipsenkonstruktion durchgeführt.

Nach Beginn einer neuen Konstruktion werden zunächst eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt M, ein Punkt F innerhalb des Kreises sowie ein Punkt P auf der Kreislinie dargestellt. Anschließend werden die Punkte P und M durch eine Strecke verbunden.

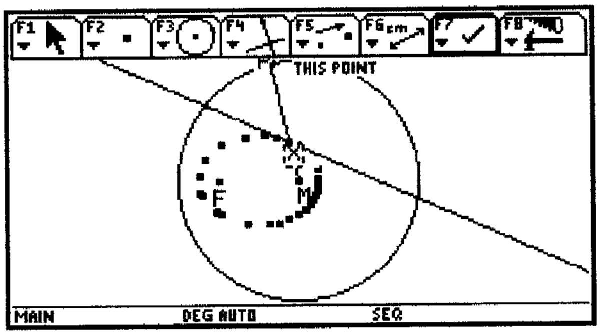


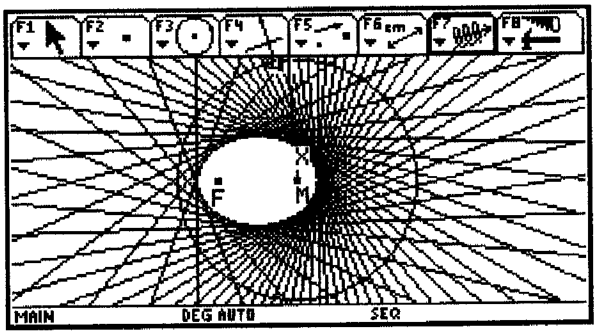
Nun wird die Streckensymmetrale der Punkte F und P konstruiert. Wenn der Punkt P längs der Kreislinie bewegt wird, dann wird die übrige Konstruktion der jeweiligen Lage von P angepaßt, wie die beiden folgenden Abbildungen zeigen.





Um zu Vermutungen zu kommen, welche Bewegung der Punkt X in Abhängigkeit zum Punkt P ausführt, kann die Spur des Punktes X verfolgt werden. Dabei muß für P der „Trace-Modus" eingestellt werden (linke folgende Abbildung). Analog kann die Spur der Streckensymmetralen verfolgt werden (rechte folgende Abbildung), wodurch es möglich ist, zur Vermutung der konstruierten Streckensymmetrale als Tangente an die so erzeugte Kurve zu gelangen.





Eigenschaften der Ellipse:

Mit der obigen Methode können Schüler nun mehrere Ellipsen konstruieren und zunächst in offenen Fragestellungen beschreiben. Beispielsweise kann nach Vermutungen über Symmetrien gefragt werden, etwa der Symmetrie der Punkte M und F bezüglich der Ellipse oder über die Form der Ellipse selbst.

Ein Problem bei solch offenen Fragestellungen ist, daß vom Schüler nicht immer in Richtung des vom Lehrer gesehenen geradlinigen Weges vorgegangen wird, sondern daß u.U. auch Argumente ablenken, die für den mathematischen Erkenntnisvorgang nicht besonders nützlich sind. Beispielsweise stellten Schüler bei der Durchführung im Unterricht die Frage, aus welchem Grund bei der (punktweise) dargestellten Ortslinie die Punkte auf der einen Seite der Ellipse enger beisammen liegen als auf der gegenüberliegenden Seite.

Von dieser Konstruktion kann man auf folgende Weise zu einer Definition der Ellipse gelangen:

Wegen der Eigenschaften der Streckensymmetrale gilt für jede Lage des Punktes P auf der Kreislinie:

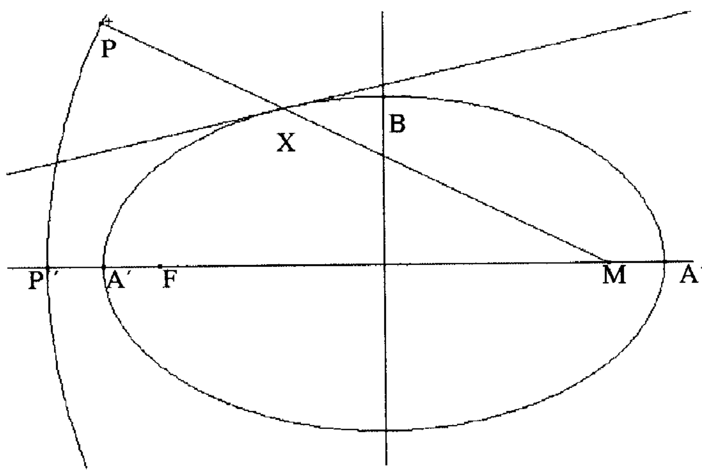
$$\overline{FX} = \overline{PX}$$

und damit

$$\overline{FX} + \overline{MX} = \overline{PX} + \overline{MX} = \overline{MP}$$

Dies bedeutet, daß die Summe der Abstände des Punktes X von den Punkten M und F konstant gleich dem Radius des Kreises ist.

Anhand einer Skizze können anschließend weitere Fragen zu den Eigenschaften der Ellipse anhand der Konstruktion geklärt werden, wie z.B.:



- Begründe, daß gilt:

$$\overline{P'A'} = \overline{A'F} = \overline{MA''}$$

- Welche Lage muß der Punkt P auf dem Kreis einnehmen, damit die Punkte X und B zusammenfallen?

- Was kann über die Tangenten an die Ellipse in den Punkten A′ und A′′ ausgesagt werden?

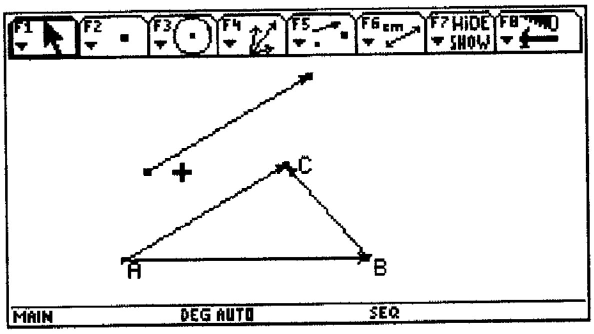
Eine Antwort auf die obige Frage nach der Symmetrie der Ellipse kann beispielsweise anhand der Ellipsengleichung gegeben werden.

Vektorsumme - Pfeildarstellung

Vektoren können mit dem TI-92 graphisch und rechnerisch verwendet werden. Hier wird die graphische Darstellungsmöglichkeit im Geometriefenster verwendet.

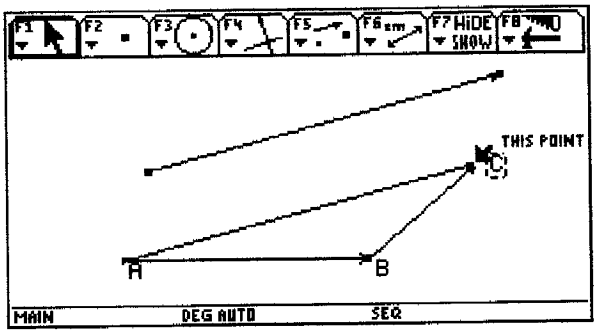
In der dargestellten Konstruktion wurden zunächst die beiden Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ als Pfeile eingetragen. Der Vektor $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ ergibt sich als Summe der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

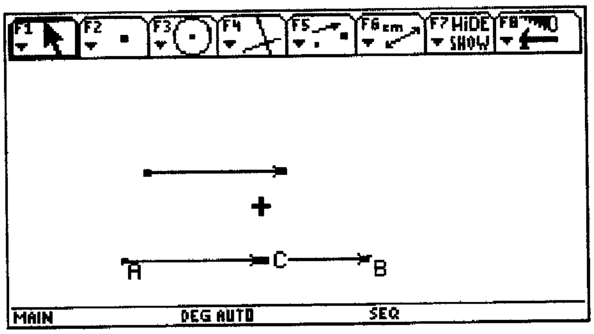
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Am TI-92 ist ein eigener Befehl für die Bildung einer Vektorsumme als Pfeiladdition vorgesehen. Dabei werden die beiden Vektoren angeklickt, deren Summe gebildet wird. Anschließend wird ein Punkt ausgewählt, von dem aus der Summenpfeil beginnen soll. In der Abbildung wurde die Summe zweimal (an verschiedenen Stellen) gebildet.

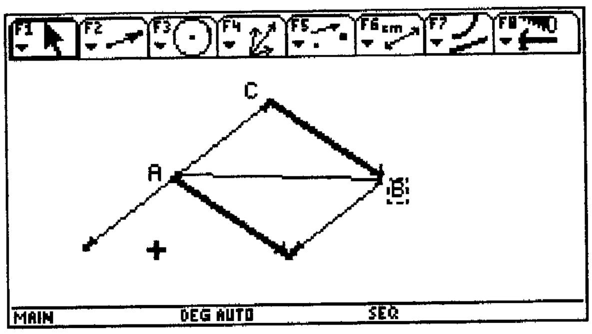
Durch Bewegung der Punkte A, B und C kann die geometrische Anordnung geändert werden. Dabei wird der Summenpfeil der jeweiligen Lage angepaßt. Auch Sonderfälle können betrachtet werden, wie etwa der Fall, daß die beiden Vektoren parallel sind (rechte Abbildung).





Anhand von offenen Aufgabenstellungen können Zusammenhänge zwischen der geometrischen Darstellung der Vektoren und der Vektoraddition erkannt werden. Beispielsweise könnte nach der Lage der beiden Vektoren gefragt werden, wenn der Summenvektor der Nullvektor ist.

In der nebenstehenden Abbildung wird gezeigt, wie analog zur Vektoraddition auch die Vektorsubtraktion im Geometriefenster dargestellt werden kann. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ beginnen vom selben Punkt. Zunächst wird der inverse Vektor zu $\vec{b}$ gebildet und dieser Vektor in den Punkt B verschoben. Damit kann die Subtraktion der beiden Vekto-

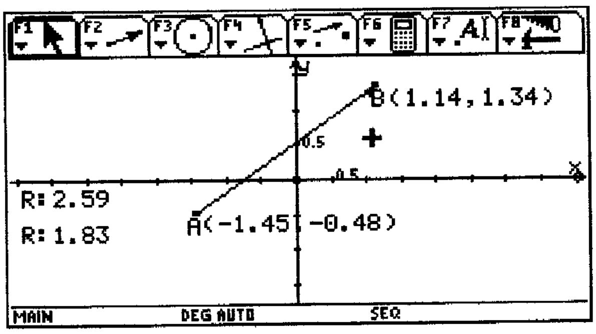


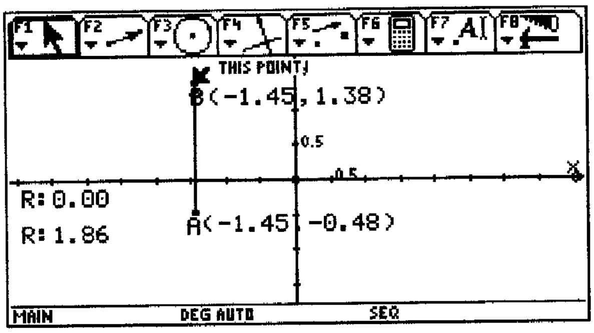
ren auf eine Vektoraddition zurückgeführt werden (Summenpfeile sind dick eingezeichnet). Analog zur Vektoraddition kann auch mit dieser geometrischen Konstruktion experimentiert werden.

Vektoren im Koordinatensystem

Konstruktionen im Geometriefenster können im Koordinatensystem dargestellt werden. Für die beiden folgenden Abbildungen wurden zwei Punkte $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ mit ihren Koordinaten dargestellt und zusätzlich der Vektor $\overrightarrow{AB}$ gebildet.

Die Koordinaten dieses Vektors ergeben sich durch $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$





Im Geometriefenster kann die Berechnung der Koordinaten durch Formeln festgelegt werden. Die Ergebnisse der beiden Koordinaten werden hier links am Display neben R (result) dargestellt.

Bei Verschiebung der Punkte werden auch die Berechnungen angepaßt. Die Ergebnisse können am Display abgelesen werden. Damit ist es auch möglich, besondere Lagen des Vektorpfeils durch Koordinaten anzugeben wie beispielsweise den Fall daß der Vektor parallel zur zweiten Achse ist (die erste Koordinate ist 0).

Zusammenfassung

Die vorliegenden Beispiele wurden aus unterschiedlichen Gebieten des Mathematikunterrichts gewählt. Im Hinblick auf den Computereinsatz stellen sie keine wesentliche inhaltliche Neuentwicklung dar. Die Aufgaben können auch mit anderen geeigneten Computerprogrammen in ähnlicher Form behandelt werden. Es sollte damit jedoch gezeigt werden, daß mit dem TI-92 ein Gerät für den Mathematikunterricht zur Verfügung steht, das für vielfältige Berechnungs- und Darstellungsmethoden geeignet ist.

Einsatz des TI-92 zur Demonstration bzw. als Rechenhilfsmittel

Während Computerprogramme im Mathematikunterricht bisher mehr zur Demonstration und in speziellen Unterrichtsstunden eingesetzt wurden, ist es die Intention, daß der TI-92 während des gesamten Mathematikunterrichts zur Verfügung steht, also auch bei Hausübungen und in der Prüfungssituation eingesetzt werden kann. Dementsprechend wird der Gebrauch als Rechenhilfsmittel wichtig sein. Dies beinhaltet neben der Taschenrechnerfunktion etwa auch die Tabellierung und die graphische Darstellung von Funktionswerten (wie in der Extremwertaufgabe gezeigt wurde), allerdings genauso die Festlegung von Funktionsaufrufen (wie bei der Binomialverteilung). Schüler könnten sich zu verschiedenen mathematischen Gebieten eine Reihe von Hilfsfunktionen speichern, die für bestimmte Anwendungen im Unterricht zur Verfügung stehen.

Anwendungen im Geometrie-Modul entsprechen meist nicht dem Anspruch des Rechenhilfmittels, sondern der Einführung in ein Stoffgebiet. Von einer bestimmten Konstruktion ausgehend soll etwa das Erkennen von Zusammenhängen gefördert werden. Dies entspricht dem demonstrativen Charakter und ist vielleicht eher mit Computerprogrammen durchführbar. Die Modelle können dann auch bereits vom Lehrer vorbereitet sein. Am TI-92 werden die Modelle von den Schülern selbst erstellt. Daher ist es günstig, möglichst einfache Konstruktionen zu wählen. Wichtig erscheint es, diese mit Arbeitsaufgaben zu versehen. Beispielsweise ist das Modell für die Vektorsumme leicht zu erstellen, es kann aber durchaus interessant sein, sich öfter den Zusammenhang zwischen der geometrischen Lage der beiden Vektoren und der Lage des Summenvektors anhand der Konstruktion klar zu machen. Ähnliches gilt auch für die Konstruktion, die einen Zusammenhang der Koordinaten eines Vektors und der Lage des Pfeils herstellt. Als weiteres Beispiel könnte dabei noch die Darstellung der Winkelfunktionswerte am Einheitskreis angegeben werden, die sich gut mit dem Geometriemodul des TI-92 lösen läßt. Das Experimentieren steht dabei im Vordergrund und das Überprüfen von Lösungsfällen.

Literaturverzeichnis

Aspetsberger K., Fuchs K., Klinger W., DERIVE, Beispiele und Ideen für den Mathematikunterricht, ACDCA, BM f. Unterricht u. kulturelle Angelegenheiten, Zentrum f. Schulentwicklung, Klagenfurt, 1994

Aspetsberger K., Schlöglhofer F.; Der TI-92 im Mathematikunterricht, Texas Instruments, 1996

Bürger H., Fischer R., Malle G., Kronfellner M., Mühlgassner T., Schlöglhofer F.; Mathematik Oberstufe 3, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991

Schlöglhofer F., DERIVE im Mathematikunterricht, Unterlagen zur Lehrerfortbildung, Pädagogisches Institut des Bundes in Oberösterreich, Linz, 1994